

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

**МАТУРСКИ РАД**  
из предмета физике

**Основи теорије хаоса на примеру  
Лоренцових једначина**

**Ученик**  
Михајло Спорић, 4д

**Ментори**  
Александра Димић  
Милан Крстајић

Београд, јун 2016.

# Садржај

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Хаотични воденични тачак</b>	<b>3</b>
2.1	Опис тачка . . . . .	3
2.2	Једначине кретања . . . . .	5
2.2.1	Закон одржања масе . . . . .	5
2.2.2	Други Њутнов закон за ротацију тачка . . . . .	6
2.2.3	Амплитудне једначине . . . . .	6
2.3	Стационарна решења . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Основна својства Лоренцових једначина</b>	<b>9</b>
3.1	Фиксне тачке . . . . .	11
3.1.1	Стабилност фиксне тачке у координатном почетку . . . . .	12
3.1.2	Стабилност фиксних тачака $C^+$ и $C^-$ . . . . .	14
3.2	Параметарски простор . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Страни атрактор</b>	<b>19</b>
4.1	Љапуновљев експонент . . . . .	21
4.2	Лоренцово пресликавање . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Закључак</b>	<b>25</b>
	<b>Литература</b>	<b>26</b>

# 1

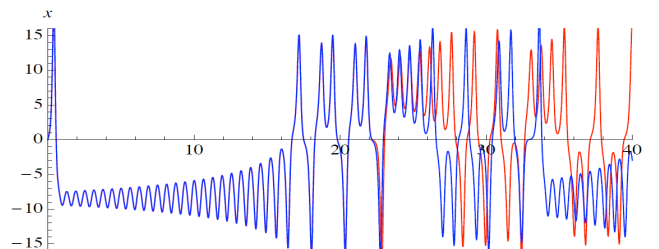
## Увод

У свом раду под називом *Детерминистички неперидични ток* из 1963. године, амерички метеоролог Едвард Лоренц проучавао је модел конвективних струјања у атмосфери, у циљу бољег разумевања непредвидивости атмосферских прилика. Дрastiчно поједноставивши Навије-Стоксове једначине које описују кретање вискозних флуида, Лоренц је за модел атмосфере добио тродимензионални нелинеарни систем описан следећим једначинама, које данас носе његово име:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{1.1}$$

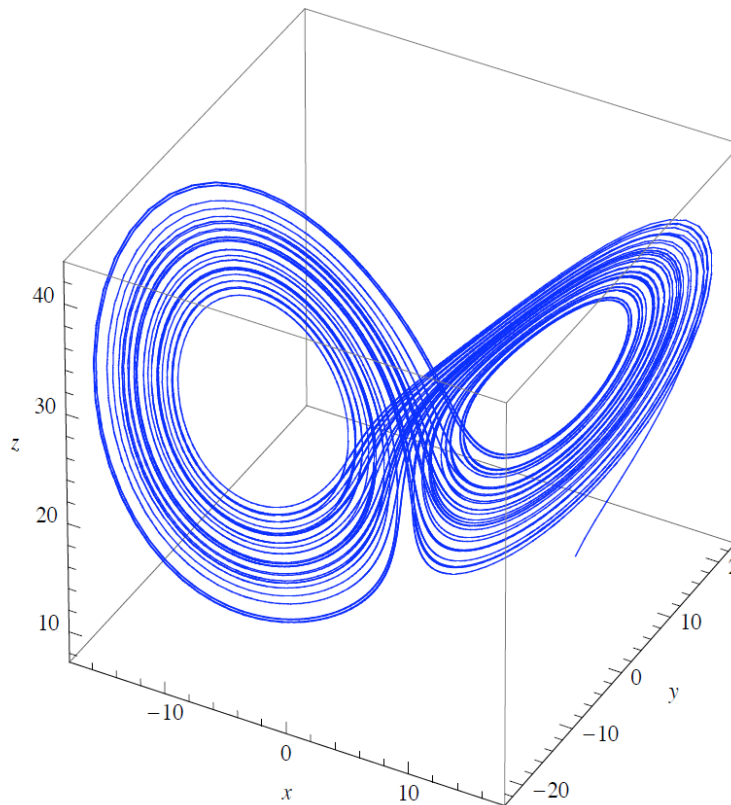
Овде су  $\sigma, r, b$  позитивни параметри.

Испитујући ове једначине, Лоренц је закључио да за одређене параметре њихова решења осцилују на нерегуларан и апериодичан начин. Осим тога, открио је и да је систем веома осетљив на почетне услове, тј. да се и када су они веома слични, криве еволуције у времену драстично разликују (слика 1.1). Ове чињенице су неке од главних карактеристика хаоса и сугеришу да је систем, иако детерминистички, суштински непредвидив - мале грешке у мерењу тренутног стања атмосфере (или било ког другог хаотичног система) брзо се увећавају, онемогућавајући дугорочне прогнозе.



Слика 1.1: Зависност координате  $x$  од времена за два веома блиска почетна услова.

Када је графички представио решења својих једначина за одређене вредности параметара у три димензије, Лоренц је добио још један занимљив резултат: трајекторије се у фазном простору групишу око комплексног скупа тачака у облику лептирових крила, који називамо **страним атрактором** (слика 1.2). Лоренц га је окарактерисао као *бесконачни комплекс површи*, а данас знамо да је у питању фрактал, фракталне димензије између 2 и 3.



Слика 1.2: Лоренцов страни атрактор.

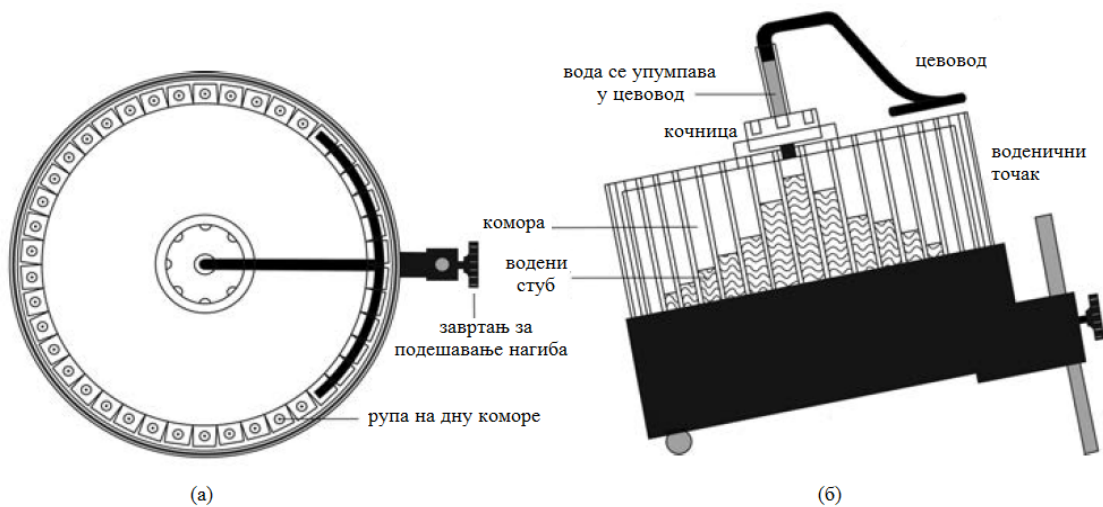
Лоренцове једначине се појављују и у другим моделима, као што су модели ласера и динаме, али и модел хаотичног воденичног точка, о којем ће бити више речи у следећем поглављу. Затим ће бити приказани различити начини на које је могуће извући информације из једначина, с обзиром да их је немогуће решити аналитички. Идеја је да се, пратећи Лоренцов начин размишљања, демонстрирају основне методе у теорији хаоса, као и главне карактеристике хаотичних система. На крају ће бити дискусије о страном атрактору и његовим својствима, као и о њиховим могућим импликацијама на временске прилике.

## 2

# Хаотични воденични точак

## 2.1 Опис точка

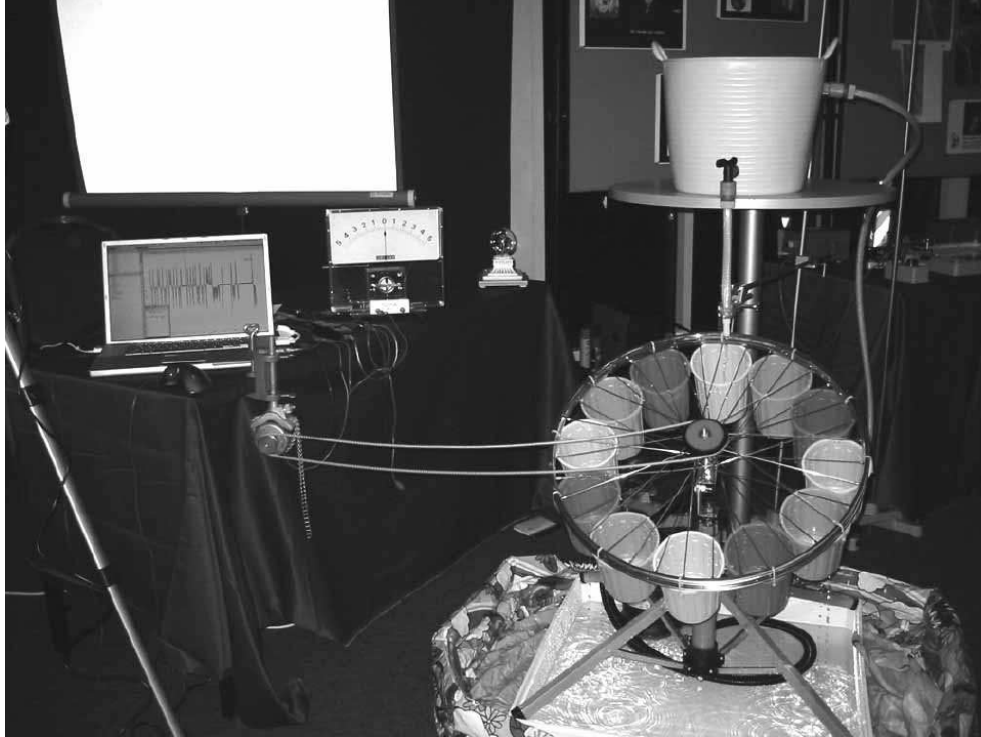
Модел воденичног точка, предложен од стране В. Малкуса и Л. Хауарда неколико година након објављивања Лоренцовог рада, један је од најједноставнијих физичких система чије је кретање описано Лоренцовим једначинама. Схема конструкције једног таквог точка дата је на слици 2.1.



Слика 2.1: Схема воденичног точка - поглед одозго (а) и попречни пресек (б).

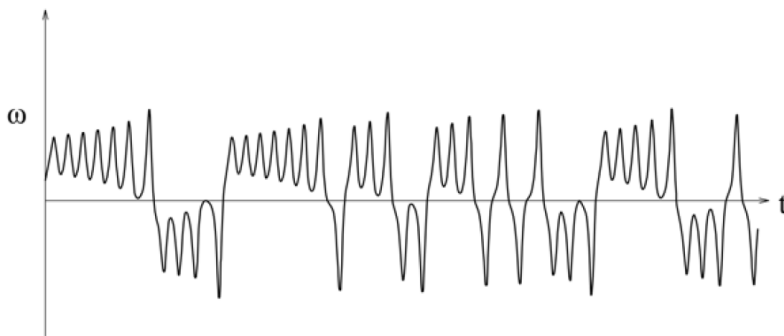
Точак се налази на постољу које је нагнуто у односу на хоризонталу, и око којег може да ротира. Подељен је на коморе од којих свака има рупу на дну. Вода се у њих улива кроз цевовод, затим истиче кроз рупе у резервоар, одакле се пумпа назад у цевовод. Проток воде одржава се константним, а два параметра која је могуће мењати су нагиб постоља (односно ефективно гравитационо убрзање) и затегнутост

кочнице (односно количина трења). Точак је прикључен на сензор који мери његову угаону брзину  $\omega(t)$ .



Слика 2.2: Физички модел точка.

На слици 2.3 дат је график очитавања сензора, за хаотични режим ротације.



Слика 2.3: Зависност угаоне брзине од времена у хаотичном режиму.

## 2.2 Једначине кретања

Величине помоћу којих ћемо описивати кретање точка су:

$\theta$  - угао у односу на постоље, мерен у позитивном смеру од правца ка истоку на слици 2.1а

$r$  - полупречник точка

$K$  - брзина истицања по јединици масе

$\nu$  - коефицијент отпора при ротацији точка

$I$  - укупан момент инерције точка и воде

$Q(\theta)$  - доток (брзина којом се вода долива у комору са координатом  $\theta$ )

$\omega(t)$  - угаона брзина точка (позитивна у смеру у коме расте  $\theta$ )

$m(\theta, t)$  - расподела масе воде по точку, дефинисана тако да је укупна маса између  $\theta_1$  и  $\theta_2$  дата са  $M(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta$

Задатак следећих секција биће описивање функција  $\omega(t)$  и  $m(\theta, t)$ .

### 2.2.1 Закон одржања масе

За почетак посматрамо сектор точка од  $\theta_1$  до  $\theta_2$  у фиксираним тренутку  $t$ . За кратки временски период  $\Delta t$  маса сектора мења се на следећи начин:

1. маса  $\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta \Delta t$  се долије у сектор,
2. маса  $\int_{\theta_1}^{\theta_2} K m(\theta, t) d\theta \Delta t$  се одлије из сектора кроз рупе на коморама (овде је претпостављено да је брзина истицања сразмерна маси воде у комори; овакву зависност је могуће остварити експериментално),
3. услед ротације точка маса  $m(\theta_1, t) \omega(t) \Delta t$  уђе, а маса  $m(\theta_2, t) \omega(t) \Delta t$  изађе из сектора.

Одавде имамо:

$$\Delta M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (Q - K m(\theta, t)) d\theta \Delta t + m(\theta_1, t) \omega(t) \Delta t - m(\theta_2, t) \omega(t) \Delta t. \quad (2.1)$$

Коришћењем  $m(\theta_2, t) - m(\theta_1, t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m}{\partial \theta} d\theta$ , након дељења једначине (2.1) са  $\Delta t$ , уз  $\Delta t \rightarrow 0$ , добијамо:

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( Q - K m - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \right) d\theta.$$

Из  $M(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta$  следи  $\frac{dM}{dt} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m}{\partial t} d\theta$ , што даје:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m}{\partial t} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( Q - Km - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \right) d\theta.$$

С обзиром да ово важи за свако  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , мора:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = Q - Km - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta}. \quad (2.2)$$

Једначина (2.2) је једначина континуитета.

### 2.2.2 Други Њутнов закон за ротацију точка

Силе које утичу на ротацију точка су сила теже, трење и сила која настаје услед инерције досуте воде (брзина јој се повећава од 0 до  $\omega$ ). Може се узети да су моменти последње две силе око центра точка сразмерни са  $\omega$ , са укупним коефицијентом  $\nu$ . За момент силе теже око центра точка  $d\mu$ , делића воде угаоне ширине  $d\theta$  важи:

$$d\mu = dMgr \sin \theta = m(\theta, t) d\theta gr \sin \theta,$$

где је  $g$  ефективно гравитационо убрзање, дакле  $g = g_0 \sin \alpha$  ( $g_0$  је стандардно гравитационо убрзање, а  $\alpha$  угао између равни точка и равни стола).

Момент инерције точка зависи од укупне масе воде  $M$  на следећи начин:

$$I = I_{\text{точка}} + Mr^2,$$

а како маса зависи од времена, исто важи и за момент инерције. Међутим, из релације  $\frac{dM}{dt} = \int_0^{2\pi} Q d\theta - KM$  може се показати да  $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \left( \int_0^{2\pi} Q d\theta \right) / K$ , тако да ћемо вредност момента инерције сматрати константом. Сада можемо да запишемо једначину кретања точка:

$$I\dot{\omega} = -\nu\omega + gr \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin \theta d\theta. \quad (2.3)$$

Једначине (2.2) и (2.3) у потпуности одређују еволуцију система.

### 2.2.3 Амплитудне једначине

Иако решавање једначина (2.2) и (2.3) на први поглед делује компликовано, применом Фуријеове анализе оно се знатно поједностављује. Наиме, ако приметимо да је функција  $m(\theta, t)$  периодична по  $\theta$  са периодом  $2\pi$ , можемо да је напишемо у облику Фуријеовог реда:

$$m(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta].$$



Слично, функција  $Q(\theta)$  је периодична са периодом  $2\pi$  и због симетрије система парна, те се може записати као:

$$Q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos n\theta.$$

Заменићемо ове нове облике  $m$  и  $Q$  у једначину (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta] \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos n\theta \\ - K \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta] - \omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta] \right]. \end{aligned}$$

Након диференцирања сума и изједначавања коефицијената уз хармонике  $\sin n\theta$  и  $\cos n\theta$ , добијамо:

$$\dot{a}_n = n\omega b_n - K a_n, \quad (2.4)$$

$$\dot{b}_n = -n\omega a_n - K b_n + q_n, \quad (2.5)$$

за све  $n = 0, 1, \dots$ . Остаје још само да развој масе у Фуријеов ред заменимо у једначину (2.3):

$$\begin{aligned} I\dot{\omega} &= -\nu\omega + gr \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta] \sin \theta d\theta \\ &= -\nu\omega + gr \int_0^{2\pi} a_1 \sin^2 \theta d\theta \\ &= -\nu\omega + gra_1\pi. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Како у једначини (2.6) фигурише једино  $a_1$ , закључујемо да она и једначине (2.4) и (2.5) за  $n = 1$  формирају затворени систем:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \omega b_1 - K a_1 \\ \dot{b}_1 &= -\omega a_1 - K b_1 + q_1 \\ I\dot{\omega} &= -\nu\omega + gra_1\pi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Овине су једначине (2.2) и (2.3) сведене на једноставнији тродимензионални систем (2.7).

### 2.3 Стационарна решења

Сада желимо да одредимо  $a_1^*$ ,  $b_1^*$  и  $\omega^*$  за које је  $\dot{a}_1 = \dot{b}_1 = \dot{\omega} = 0$ .  
Решавањем система једначина:

$$0 = \omega b_1 - K a_1$$

$$0 = -\omega a_1 - K b_1 + q_1$$

$$0 = -\nu \omega + g r a_1 \pi$$

добиамо следеће резултате:

1.  $(a_1^*, b_1^*, \omega^*) = (0, q_1/K, 0)$ : ово решење одговара ситуацији у којој точак мирује, а доток је изједначен са истицањем; касније ће бити разматрана стабилност овог решења.
2.  $b_1^* = \frac{K\nu}{\pi gr}$ ,  $\omega^* = \pm \sqrt{\frac{\pi gr q_1}{\nu} - K^2}$ ,  $a_1^* = \frac{\nu \omega^*}{\pi gr}$ : ово решење одговара ситуацији у којој се точак врти константном угаоном брзином, у једном или у другом смеру. Приметимо да решење постоји само за  $\pi gr q_1 / K^2 \nu > 1$ . Израз на левој страни неједнакости носи име **Рејлијев број** и појављује се и у другим гранама динамике флуида; он говори какав је однос утицаја сила које поспешују кретање точка (чланови  $g$  и  $q_1$ ), и сила које га пригушују (чланови  $K$  и  $\nu$ ). Оно што је zgodно је то да се његова вредност лако може експериментално варирати, променом нагиба постоља или затегнутости кочнице.

Сада је циљ наћи и остала решења система (2.7). Може се показати да је тај систем специјалан случај Лоренцових једначина (1.1), и то тако да функција  $\omega(t)$  одговара Лоренцовој променљивој  $x$ . Из тог разлога ћемо се у наставку фокусирати на решавање Лоренцових једначина, као општијег проблема.

### 3

## Основна својства Лоренцових једначина

Запишимо поново Лоренцове једначине:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где су  $\sigma, r, b > 0$  параметри.

Једначине одређују брзину сваке тачке у фазном простору у функцији од њених координата, што значи да оне представљају векторско поље  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Ако посматрамо тачку са почетним координатама  $x(0), y(0), z(0)$ , знамо да је на основу једначина њена позиција  $x(t), y(t), z(t)$  у сваком тренутку одређена. Међутим, трајекторију тачке је због нелинеарности система немогуће аналитички израчунати, тако да ћемо у наставку демонстрирати другачији приступ којим је Лоренц испитивао овај систем.

Приметимо прво да су једначине инваријантне у односу на трансформацију координата  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ . То значи да ако је  $(x(t), y(t), z(t))$  решење, исто важи и за  $(-x(t), -y(t), z(t))$ . Одавде следи да сва решења или имају симетричног пара или су сама симетрична у односу на  $z$ -осу.

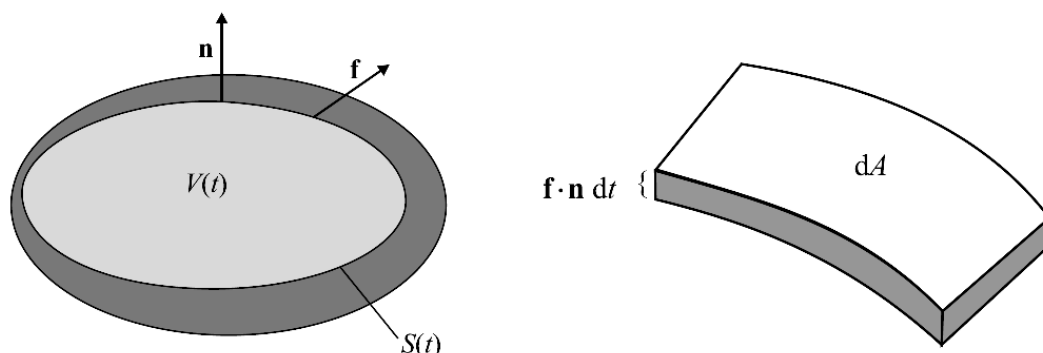
Даље, анализирајући поље  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  можемо закључити да је систем *дисипативан*, односно да се запремина сваког скупа почетних услова у фазном простору временом смањује. Погледајмо шта се дешава у општем случају: нека је дато векторско поље  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  и почетна запремина  $V_0$  скупа почетних услова чију ћемо еволуцију пратити. Довољно је да се фокусирамо на граничну површину овог скупа, пошто се може показати да тачке ограничене њоме никад не излазе из ње (ако не би било тако, две трајекторије би се у неком тренутку пресекле, а знамо да је то немогуће).

За бесконачно мали временски период  $dt$  посматрамо површину  $dA$ . Промена запремине биће (слика 3.1):

$$dV = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dt dA,$$

па ако прођемо по целој површини и поделимо са  $dt$  добијамо:

$$\dot{V} = \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dA.$$



Слика 3.1: Схематски приказ промене запремине за време  $dt$ .

На крају, после примене теореме о дивергенцији на претходну једначину, имамо:

$$\dot{V} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV.$$

Ако сада за  $\mathbf{f}$  заменимо једначине (3.1):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_V \left( \frac{\partial}{\partial x} (\sigma(y-x)) + \frac{\partial}{\partial y} (rx-y-xz) + \frac{\partial}{\partial z} (xy-bz) \right) dV \\ &= - \int_V (\sigma + b + 1) dV = -(\sigma + b + 1) V. \end{aligned}$$

Одавде је  $V(t) = V_0 e^{-(\sigma+b+1)t}$ , па како је  $\sigma + b + 1 > 0$ , следи  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ . То значи да ће се свака запремина у фазном простору смањивати експоненцијално брзо, односно да ће сви скупови почетних услова тежити нултој запремини.

Ова чињеница већ сама по себи искључује могућност постојања одбојних фиксних тачака и одбојних затворених орбита (за њих све тачке из мале области која их окружује бивају одбијене из те области). Кад би оне постојале, мала област облика

лопте односно цилиндра око фиксне тачке односно орбите би се за неки мали период повећала, што даје контрадикцију. Такође је искључена и могућност постојања квазипериодичних путања, јер би оне морале да леже на инваријантном торусу (чија се запремина не мења временом), па би запремина ограничена њиме остајала константна.

Следећа ствар коју ћемо показати је да све трајекторије после довољно дуго времена уђу у одређену област и остану у њој заувек. Посматрајмо функцију:

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2,$$

и њен извод по времену:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y, z) &= 2rx\dot{x} + 2\sigma y\dot{y} + 2\sigma(z - 2r)\dot{z} \\ &= 2rx\sigma(y - x) + 2\sigma y(rx - y - xz) + 2\sigma(z - 2r)(xy - bz) \\ &= -2\sigma(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2rbz).\end{aligned}$$

Одавде је  $\dot{V}(x, y, z) < 0$  када  $rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 > br^2$ . То значи да ће се по трајекторијама све док важи  $rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 > br^2$  вредност  $V$  временом смањивати, што повлачи да ће све оне у једном тренутку ући у област  $rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 \leq C$ , где је  $C$  изабрано тако да елипсоид  $rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 = br^2$  у потпуности припада области. Трајекторије које уђу заувек остају у области, чиме је показано да су решења (3.1) после неког времена њоме ограничена.

### 3.1 Фиксне тачке

Решавањем  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , добијамо следеће фиксне тачке система (3.1):

1.  $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ , за све вредности параметара,
2.  $x^* = y^* = \pm\sqrt{b(r - 1)}$ ,  $z^* = r - 1$ , за  $r > 1$  (Лоренц их је називао  $C^+$  и  $C^-$ ).

Коришћењем технике линеаризације која околину фиксних тачака апроксимира линеарним системом, покушаћемо да испитамо понашање трајекторија у њиховој близини. Посматраћемо следећи општи тродимензионални случај:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, z) \\ \dot{y} &= g(x, y, z) \\ \dot{z} &= h(x, y, z)\end{aligned}$$

са жељом да га апроксимирамо у околину фиксне тачке  $(x^*, y^*, z^*)$ .

Увођењем смене  $u = x - x^*$ ,  $v = y - y^*$ ,  $w = z - z^*$ , променљиве  $u$ ,  $v$  и  $w$  постају координате у односу на фиксну тачку. Из Тејлоровог развоја имамо:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \dot{x} \\ &= f(x, y, z) \\ &= f(x^* + u, y^* + v, z^* + w) \\ &= f(x^*, y^*, z^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \text{чланови вишег степена} \\ &= u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \text{чланови вишег степена,}\end{aligned}$$

и слично за  $\dot{v}$  и  $\dot{w}$ . Сада систем можемо да запишемо у облику:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \text{чланови вишег степена,}$$

где се матрица

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*, z^*)}$$

зове **Јакобијева матрица**.

Испоставља се да се чланови вишег реда не могу занемарити једино када  $\tau^2 = 4\Delta$ , или  $\Delta = 0$ , или  $\tau = 0$  и  $\Delta > 0$  ( $\Delta$  је детерминанта, а  $\tau$  траг матрице  $J$ ). У осталим случајевима добијамо систем:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

који за једначине (3.1) постаје:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z^* & -1 & -x^* \\ y^* & x^* & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

### 3.1.1 Стабилност фиксне тачке у координатном почетку

Ако у (3.2) заменимо  $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ , добијамо:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Одмах уочавамо да за  $w$  важи  $\dot{w} = -bw$ , одакле је  $w(t) = w(0) e^{-bt}$ . Сада се (3.3) своди на:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Ово ћемо решавати у општем случају, дакле:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}. \quad (3.5)$$

Потражимо решење облика  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ , где је  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  фиксирани вектор који треба одредити. Заменом у једначину (3.5) добијамо  $\lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = A e^{\lambda t}\mathbf{v}$ , односно након скраћивања позитивног фактора  $e^{\lambda t}$ :

$$\lambda \mathbf{v} = A\mathbf{v}.$$

То значи да је  $\mathbf{v}$  својствени вектор матрице  $A$ , који одговара својственој вредности  $\lambda$ . Како је  $A$  матрица  $2 \times 2$ , обично ће имати две различите својствене вредности, у ком случају ће одговарајући својствени вектори бити линеарно независни. Тада сваки почетни услов може бити написан у облику  $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ , па можемо да запишемо опште решење (3.5):

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2. \quad (3.6)$$

Ово решење задовољава једначину (3.5), као и почетне услове, па је по теореме о егзистенцији и јединствености и једино решење.

Сада се враћамо на систем (3.4) и за матрицу  $A$  рачунамо детерминанту и траг:  $\Delta = \sigma(1-r)$ ,  $\tau = -\sigma - 1 < 0$ . Својствене вредности могу се рачунати по формули  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})$ , где је  $\tau^2 - 4\Delta = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma r > 0$ . У зависности од параметра  $r$ :

1.  $r < 1$ :  $\Delta > 0$ , па  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,
2.  $r > 1$ :  $\Delta < 0$ , па  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,
3.  $r = 1$ :  $\Delta = 0$ , па не смемо занемарити чланове вишег реда приликом линеаризације.

Знак својствене вредности одређује понашање трајекторија у близини координатног почетка, и то по једначини (3.6).

У првом случају трајекторије по оба сопствена вектора експоненцијално теже координатном почетку, а с обзиром да се исто дешава и по  $w$  односно  $z$ -оси, кажемо да је у овом случају фиксна тачка у координатном почетку **локално стабилна** (привлачна). То значи да ће јој се све трајекторије које крену довољно близу њој временом приближавати.

У другом случају трајекторије су по једном правцу одбијене, а по другом привучене, што заједно са привлачним  $z$ -правцем даје два привлачна и један одбојни правац. У овом случају фиксну тачку у координатном почетку називамо **седлом**.

У трећем случају, за вредност  $r = 1$  фиксна тачка у координатном почетку прелази из стабилног чвора у седло. Овакве квалитативне промене динамике система приликом мењања параметара називају се **бифуркације**, а вредности параметара за које се дешавају називају се **бифуркационе тачке**. Бифуркација која се овде дешава је **наткритична власта бифуркација**, и карактеристична је по томе што једна стабилна фиксна тачка (у овом случају она у координатном почетку) губи стабилност, и у процесу ствара нови пар стабилних фиксних тачака (видећемо да су у овом случају то  $C^+$  и  $C^-$ ).

Сада желимо да на сличан начин на који смо показали да све трајекторије бивају заробљене у одређеној области фазног простора покажемо да је у случају  $r < 1$  координатни почетак глобално стабилан. Посматрамо следећу функцију (функције помоћу којих на овај начин доказујемо стабилност називају се **Љапуновљеве функције**):

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2.$$

Њен извод по времену је:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) &= 2\frac{1}{\sigma}x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} \\ &= 2\frac{1}{\sigma}x\sigma(y - x) + 2y(rx - y - xz) + 2z(xy - bz) \\ &= -2 \left[ \left( x - \frac{r+1}{2}y \right)^2 + \left( 1 - \left( \frac{r+1}{2} \right)^2 \right) y^2 - bz^2 \right]. \end{aligned}$$

Члан уз  $y^2$  је позитиван за  $r < 1$ , па следи да је  $\dot{V}(x, y, z) = 0$  само кад  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . У осталим случајевима је  $\dot{V}(x, y, z) < 0$ , што значи да се трајекторије спуштају на ниже вредности функције  $V$ . Како су површи на којим је  $V = \text{const.}$  елипсоиди са центром у координатном почетку, закључујемо да се све трајекторије спуштају ка координатном почетку. То значи да је фиксна тачка у њему за  $r < 1$  **глобално стабилна**.

### 3.1.2 Стабилност фиксних тачака $C^+$ и $C^-$

Претпоставимо сада да је  $r > 1$ , тако да фиксне тачке  $C^+$  и  $C^-$  постоје. Карактеристична једначина својствених вредности Јакобијеве матрице за њихове координате је:

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0.$$

Ако потражимо чисто имагинарна решења облика  $\lambda = i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , налазимо да пар таквих решења постоји за

$$r = r_H = \sigma \left( \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right),$$



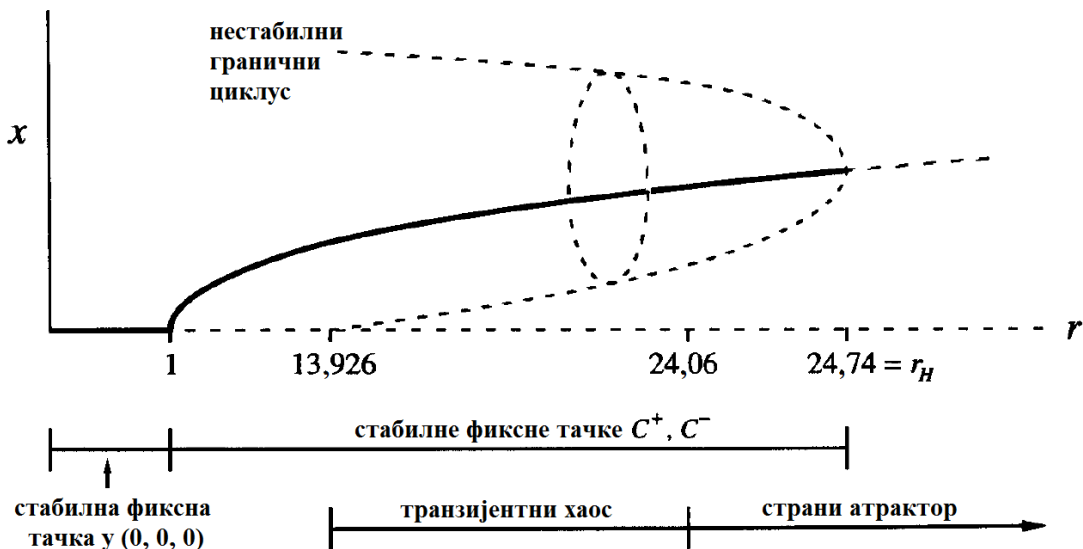
и то само ако  $\sigma > b + 1$ . Испоставља се да су тачке  $C^+$  и  $C^-$  стабилне када  $r < r_H$  и  $\sigma > b + 1$ , јер су тада реални делови све три својствене вредности негативни. Ако останемо у овој области али  $r$  приближимо  $r_H$ , око сваке од  $C^+$  и  $C^-$  налазимо по један гранични циклус који је по једном правцу стабилан, а по једном нестабилан. У питању су такозвани **седласти циклуси**, који се за  $r = r_H$  поклопе са  $C^+$  и  $C^-$ . Од тог тренутка, за  $r > r_H$ , ове две фиксне тачке постају нестабилне и прелазе у седла. То значи да долази до бифуркације за  $r = r_H$ , а овај конкретни тип (када се нестабилни циклус спусти на стабилну фиксну тачку и претвори је у нестабилну) називамо **поткритичном Хопфовом бифуркацијом**.

## 3.2 Параметарски простор

Као што видимо, понашање неког динамичког система у великој мери зависи од параметара. Зато је у његовом испитивању увек интересно истраживати параметарски простор, односно пратити како се динамика мења у различитим областима овог простора.

Како би варирање сва три параметра Лоренцовог система захтевало прилично опширну анализу, ми ћемо у нашем разматрању фиксирати  $\sigma$  и  $b$ , а мењати  $r$ . Лако се види да овај параметар у случају воденичног точка има вредност Рејлијевог броја, који се, као што смо видели, може експериментално подешавати.

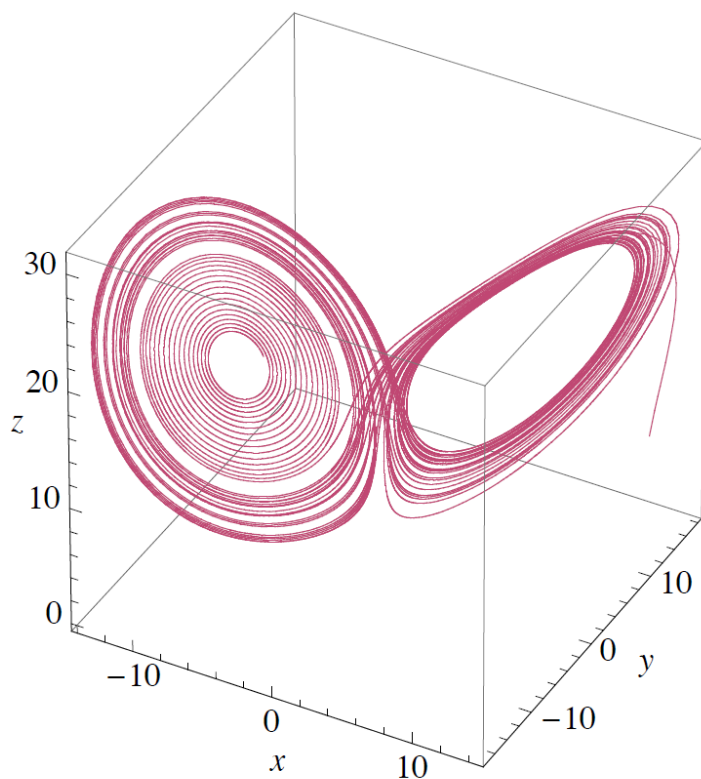
По узору на Лоренца, поставићемо  $\sigma = 10$  и  $b = \frac{8}{3}$ . На слици 3.2 је скицирано понашање система за различите вредности  $r$ . Овакав приказ зове се **бифуркациони дијаграм**.



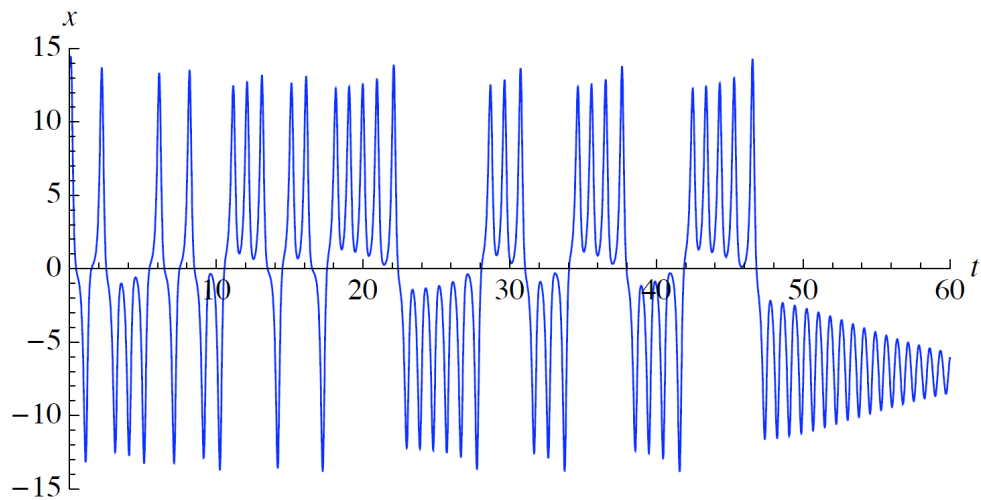
Слика 3.2: Бифуркациони дијаграм система.

За  $0 < r < 1$  смо показали да постоји само једна фиксна тачка, која се налази у координатном почетку и која је глобално стабилна. На  $r = 1$  се дешава наткритична виласта бифуркација, тако да за  $r > 1$  ова тачка постаје нестабилно седло. У исто време настају и две нове стабилне фиксне тачке:  $C^+$  и  $C^-$  (на слици 3.2 је представљена само једна). Ове тачке губе стабилност за  $r = r_H = 24,74$  поткритичном Хопфовом бифуркацијом и апсорбујући нестабилне граничне циклусе постају седла. Ако сада почнемо да смањујемо  $r$ , уочавамо да се поменути два гранична циклуса удаљавају од  $C^+$  и  $C^-$ , све до тачке  $r = 13,926$  у којој се спајају са фиксном тачком у координатном почетку. Ови циклуси не постоје за  $r < 13,926$ , што значи да они настају у  $r = 13,926$  како повећавамо  $r$ . Овде је у питању такозвана **хомоклиничка бифуркација**, чија је анализа изузетно комплексна; оно што је нама најбитније је да овом приликом осим два нестабилна циклуса настаје и сложена структура која систем чини осетљивим на почетне услове.

Захваљујући овој структури, за  $r > 13,926$  први пут видимо знакове хаотичног понашања у виду **транзијентног хаоса**. Трајекторије могу да проведу доста времена на поменутој структури вијугајући хаотично, али на крају увек заврше на путањама ка стабилним тачкама  $C^+$  или  $C^-$ . На слици 3.3 је дат приказ једне такве трајекторије у фазном простору за  $r = 20$ , а на слици 3.4 зависност  $x(t)$  за исту.



Слика 3.3: Трајекторија која испољава транзијентни хаос.

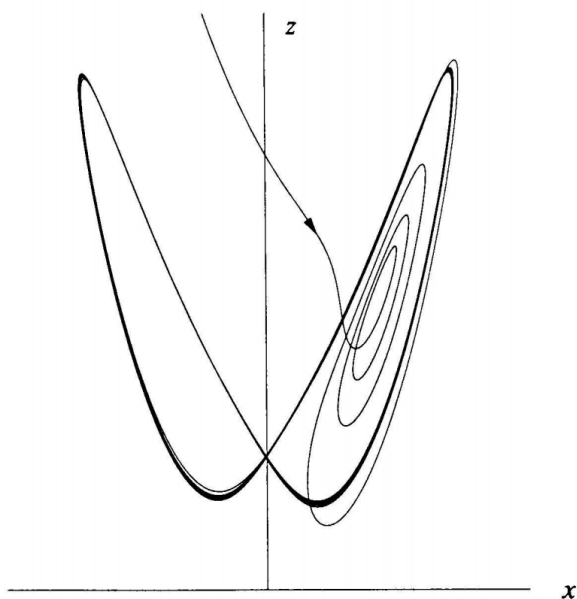


Слика 3.4: Зависност  $x$  координате од времена у режиму транзијентног хаоса.

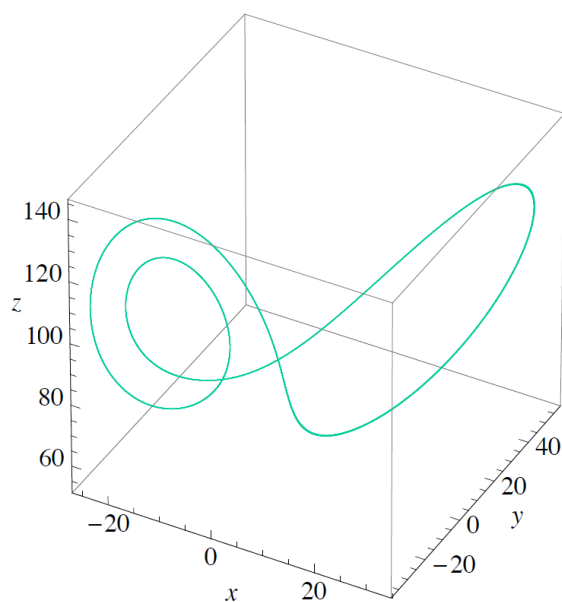
Како се  $r$  удаљава од 13,926, време проведено у хаотичном режиму постаје веће и веће, све до критичне вредности  $r = 24,06$  на којој структура о којој смо говорили постаје **страни атрактор**. Ако хаос дефинишемо као дугорочно аперiodично понашање у детерминистичком систему које показује велику осетљивост на промену почетних услова, видимо да се он у правом смислу јавља тек сада (транзијентни хаос показује осетљивост на промену почетних услова јер она лако може утицати на то да ли ће се трајекторија спустити на  $C^+$  или  $C^-$ ; он међутим није дугорочно аперiodичан). Интересантно је што сада за вредности до  $r = 24,74$  још увек постоје и страни атрактор и стабилне фиксне тачке  $C^+$  и  $C^-$ .

За  $r$  мало веће од  $r_H$  не постоје ни стабилне фиксне тачке, ни стабилни циклуси (Лоренц није био апсолутно сигуран за ово друго, али је имао јаке аргументе које ћемо поменути касније). Осим тога, трајекторије не могу да оду у бесконачност јер смо показали да су све после довољно времена ограничене одређеним елипсоидом, што значи да остају заробљене у страном атрактору. О овом режиму ћемо говорити више у следећем поглављу.

За велике вредности  $r$  ( $r > 313$ ) нумеричке симулације указују на то да систем има глобално стабилни гранични циклус (слика 3.5). С друге стране, за вредности између 24,72 и 313 ситуација је много компликованија, јер се хаотично и периодично понашање смењују за различите вредности параметра. Неке од већих периодичних области су  $99,524 < r < 100,795$  (слика 3.6) и  $145 < r < 166$ .



Слика 3.5: Зависност  $z(x)$  за  $r = 350$ .

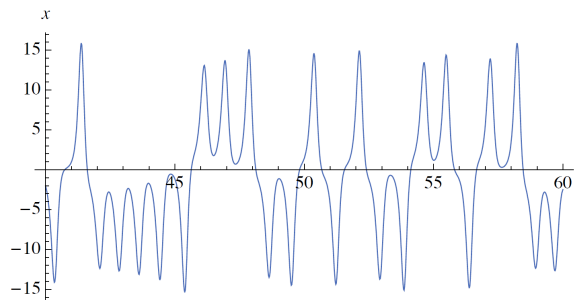


Слика 3.6: Периодична трајекторија за  $r = 100$ .

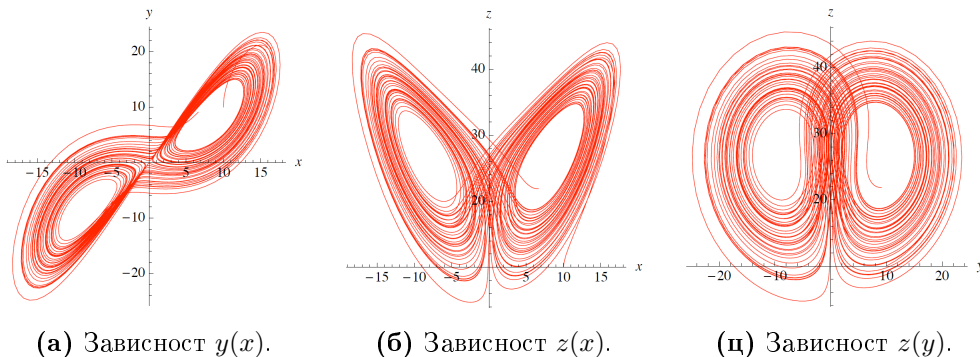
## 4

# Страни атрактор

Фиксирајмо сада параметре на вредности које је Лоренц користио:  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ ,  $r = 28$ . Ова вредност  $r$  одговара хаотичном режиму, тако да ћемо њу користити за анализирање страног атрактора. Посматрајмо трајекторију тачке са почетним условима  $(10, 10, 10)$ : слика 4.1 представља зависност  $x(t)$ , слика 4.2 дводимензионалне пројекције трајекторије, а слика 4.3 изглед трајекторије у фазном простору.



Слика 4.1: Зависност  $x(t)$  у хаотичном режиму.

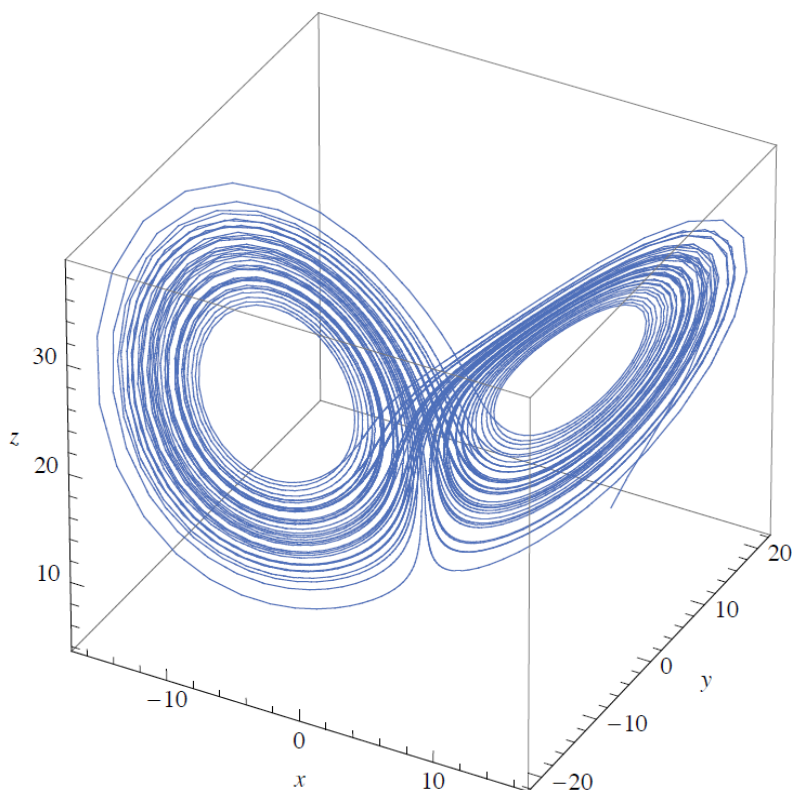


(а) Зависност  $y(x)$ .

(б) Зависност  $z(x)$ .

(ц) Зависност  $z(y)$ .

Слика 4.2: Пројекције трајекторије на равни нормалне на координатне осе.

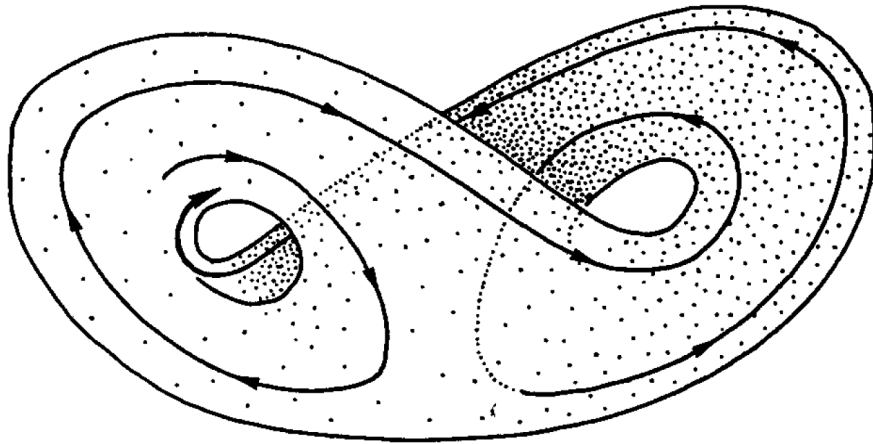


Слика 4.3: Трајекторија у фазном простору у хаотичном режиму.

Са слике 4.1 видимо да је кретање **апериодично**: нерегуларно осцилује у бесконачност. Сличну ствар примећујемо ако гледамо знак функције  $x$  - мења се нерегуларно и непредвидиво.

Када се трајекторија нацрта у фазном простору (слика 4.3) чини се да лежи на скупу који по облику подсећа на лептирова крила (слика 4.26), и који називамо страним атрактором. Овај гранични скуп има нулту запремину (показано у поглављу 3) и веома компликовану геометријску структуру, која је представљена на слици 4.4.

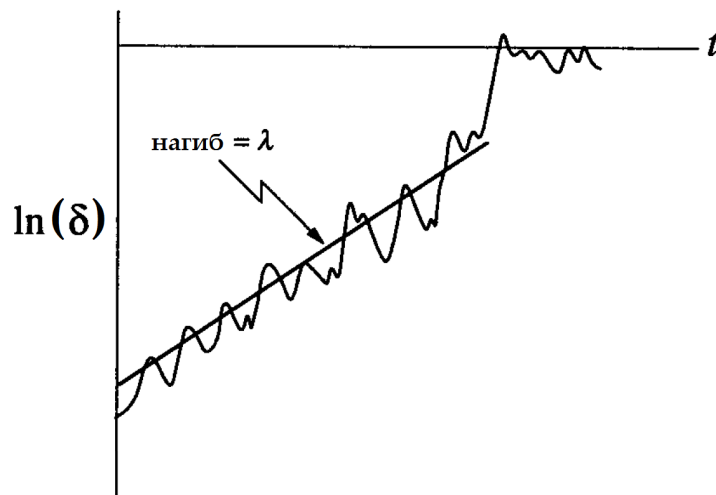
Иако изгледа да се две површи на слици 4.4 спајају у једну, знамо да није тако јер трајекторије не могу да се додирују. То значи да су ове површи само приљубљене једна уз другу, и да тако заједно круже око тачака  $C^+$  и  $C^-$ . Ово, међутим, повлачи да је свака од њих и сама састављена од две површи, тако да их је укупно четири. Истим аргументом можемо сваки пут да дуплирамо број површи, што значи да их прво има бесконачно много (Лоренц је страни атрактор окарактерисао као *бесконачни комплекс површи*). На основу ове особине следи да је страни атрактор фрактал, а нумерички прорачуни указују на то да је његова димензија око 2,05. Површина му је бесконачна, а запремина нулта.



Слика 4.4: Приказ геометријске структуре страног атрактора.

## 4.1 Љапуновљев експонент

Поред апериодичности, друга битна карактеристика страног атрактора је осетљивост на промену почетних услова. Претпоставимо да имамо два различита почетна услова који су у фазном простору на удаљености  $\delta_0$ . Пратићемо функцију  $\delta(t)$  која означава њихову удаљеност у датом тренутку и нацртати график њеног природног логаритма од времена (слика 4.5):



Слика 4.5: Зависност природног логаритма удаљености тачака од времена.

Чињеница да је график у почетку приближно линеаран указује на то да се две тачке у фазном простору удаљују једна од друге експоненцијално брзо:

$$\delta(t) = \delta_0 e^{\lambda t}. \quad (4.1)$$

То наравно не траје заувек, јер је њихово кретање као што знамо ограничено на унутрашност одређеног елипсоида. Ово објашњава зашто функција на слици 4.5 у једном тренутку престаје да расте.

Број  $\lambda$  зове се **Љапуновљев експонент** и може се одредити нумерички; за параметре које смо ми користили износи  $\lambda = 0,9$ . Битно је нагласити да ова вредност варира у зависности од положаја на атрактору, тако да је за његово одређивање потребно узети просек на великом броју трајекторија. Такође треба поменути да у  $n$ -димензионалном систему заправо има  $n$  Љапуновљевих експонената: ако пратимо еволуцију мале хиперсфере почетних услова видећемо да се она за кратко време деформише у елипсоид, па по сваком правцу постоји по један Љапуновљев експонент. У овом случају за  $\lambda$  бирамо највећи од њих.

Системи у којима је  $\lambda > 0$  одликују се осетљивошћу на почетне услове и самим тим немогућности дугорочног предвиђања. Ако уведемо временски хоризонт  $t_h$  као време након којег предвиђање постаје непрецизно,  $\varepsilon$  као минималну удаљеност у фазном простору на којој разликујемо две тачке и  $\delta_0$  као неодређеност мерења, из једначине (4.1) добијамо:

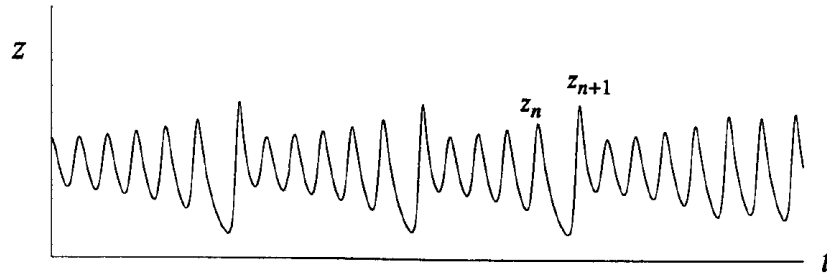
$$t \sim \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\varepsilon}{\delta_0} \right).$$

Логаритамска зависност  $t_h$  од  $\delta_0$  је разлог из ког су немогућа дугорочна предвиђања: ако на пример узмемо  $\varepsilon = 1$  и  $\delta_0 = 10^{-2}$ , да бисмо временски хоризонт повећали 10 пута, прецизност мерења  $\delta$  морамо повећати чак  $10^{18}$  пута.

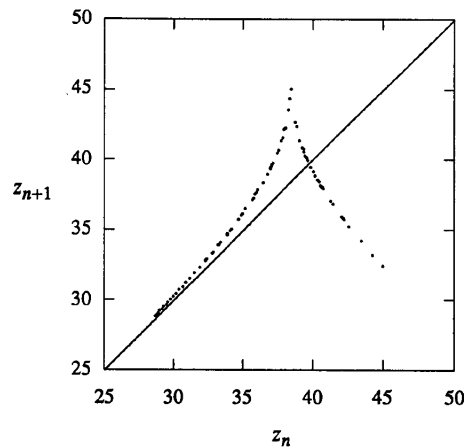
## 4.2 Лоренцово пресликавање

Ако се вратимо на график на слици 4.2ц, можемо да уочимо једну правилност, а то је да тачке круже око једног центра све док се не удаље довољно и пређу на други. Осим тога, изгледа да удаљеност од једног центра пре прелаза одређује удаљеност од другог после прелаза. Приметивши ово, Лоренц је одлучио да посматра зависност  $z$  координате од времена, која је приказана на слици 4.6.



Слика 4.6: Зависност  $z(t)$  у хаотичном режиму.

Уочивши да дефинитивно постоји нека правилност, Лоренц је даље посматрао локалне максимуме функције  $z(t)$  које је назвао  $z_n$ . Затим је графички приказао зависности  $z_{n+1}$  од  $z_n$  и добио следећи изненађујући резултат (слика 4.7):

Слика 4.7: Зависност  $z_{n+1}$  од  $z_n$ .

Све вредности су се груписале на кривој која је имала врло малу дебљину. Ову функцију  $z_{n+1} = f(z_n)$  представљену на слици 4.7 данас називамо **Лоренцовим пресликавањем**. Одмах треба разјаснити да управо из разлога што има неку дебљину она није добро дефинисана. Међутим, како је та дебљина врло мала, претпоставићемо да не постоји, имајућу у виду да због овога сва даља разматрања неће бити ригорозна.

Вратимо се на идеју поменути у секцији 3.2: да за тренутне параметре не постоје стабилни гранични циклуси. Посматрајмо било који циклус који одговара низу  $\{z_n\}$ . Како је у питању циклус, мора да постоји природан број  $p$  за који је  $z_n = z_{n+p}$ . Ако уведемо  $\eta_k$  као мало одступање од  $z_k$ , линеаризацијом се показује да  $\eta_{k+1} = |f'(z_k)| \eta_k$ .

Одавде следи да је:

$$\eta_{n+p} = \left| \prod_{k=0}^{p-1} f'(z_{n+k}) \right| \eta_n. \quad (4.2)$$

Сада је кључно приметити са графика на слици 4.7 да је  $|f'(z_n)| > 1$ , за свако  $z_n$ . Ако ово заменимо у (4.2), добијамо:

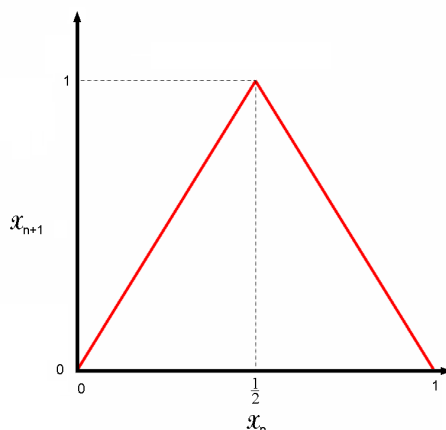
$$\eta_{n+p} > \eta_n.$$

Ово значи да свако мало одступање од орбите временом расте, односно да свака затворена орбита за разматране вредности параметара мора бити нестабилна.

За поједностављени математички модел Лоренцовог пресликавања може се узети функција:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n < 1/2 \\ 2 - 2x_n, & 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

Њен график је дат на слици 4.8



Слика 4.8: Зависност  $x_{n+1}$  од  $x_n$ .

Прелазак између области  $0 \leq x < 1/2$  и  $1/2 \leq x \leq 1$  у овом моделу одговара преласку између кружења око једног и око другог центра код Лоренцовог атрактора. Показује се да у моделу за произвољну секвенцу прелаза увек постоји почетни услов  $x_0$  који је задовољава, а како свака трајекторија на страном атрактору има себи одговарајућу на моделу, може се закључити да исто важи и за њега. Овај резултат у великој мери помаже бољем разумевању унутрашње динамике атрактора.

## 5

# Закључак

За крај можемо да се вратимо на Лоренцово почетно питање, а то је какве су импликације карактеристика страног атрактора на временске прилике и њихово предвиђање? Под условом да Лоренцове једначине заправо имају везе са стварним атмосферским приликама, можемо извести неке врло интересантне закључке. Најпознатији је, свакако, **ефекат лептира**<sup>1</sup> који говори о томе како лет лептира у Бразилу може изазвати торнаду у Тексасу. Ова тврдња се, наравно, заснива на високој осетљивости на промену почетних услова. Ако одредимо област у фазном простору која одговара торнаду у Тексасу, чак и крајње безначајна ствар као што је лет лептира може да одлучи да ли ће трајекторија са датим почетним условима проћи кроз ову област.

Лоренц иде и корак даље, тврдећи да лет лептира током већег временског периода не може да утиче на учесталост временских непогода, већ само на редослед у коме се оне појављују. Он се овде ослања на битно статистичко својство страног атрактора: да ако посматрамо област која одговара торнаду у Тексасу и меримо проценат времена од 0 до  $t$  који трајекторија проведе унутар ове области, добијамо да његова вредност конвергира кад  $t \rightarrow \infty$ . Штавише, вредност овог лимеса не зависи од почетних услова и иста је за све трајекторије. Ово је битан резултат за метеорологију, јер потврђује значај статистичких разматрања.

---

<sup>1</sup>Butterfly effect (енг.)

# Захвалност

Овим путем се захваљујем својим менторима, Александри Димић и Милану Крстајићу, као и свим својим професорима, за знање које су ми пренели током ове четири године.

# Литература

- [1] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, 1994.
- [2] E. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 20, 1963.
- [3] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- [4] E. Lorenz, *The Essence of Chaos*, University of Washington Press, 1993.
- [5] H. Goldstein, C. P. Poole, J. L. Safko, *Classical Mechanics (3rd ed.)*, Addison-Wesley, 2001.
- [6] C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag, 1982.